Exercice :

Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & si \quad x\in]0,1] \\ f(0)=0 \end{cases}$

On donne ci-contre le tableau de variation de f

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{2}-1$

1°) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0<U_n\leq 1$

2°) a) Montrer que pour tout n ∈ IN on a : $U_{n+1}\leq \frac{1}{2}U_n$

b) En déduire que U est décroissante et que $U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Calculer la limite de la suite U.

1°) pour $n=0$ $\quad 0<U_0=1\leq 1$ (Vrai)

Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $0<U_n\leq 1$ et

montrons que $0<U_{n+1}\leq 1$.

On a $0<U_n\leq 1$

or f est croissante sur $[0,1]$

Donc $f(0)<f(U_n)\leq f(1)$

$\Rightarrow 0<U_{n+1}\leq \sqrt{2}-1\leq 1$